Aula 01: Números Complexos

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Grupo de ALGA

Instituto Superior de Transportes e Comunicações

Maputo, Fevereiro de 2024

Notas de aulas para estudantes de Engenharia

Números Complexos

Definição

Chama-se número complexo ao número da forma $z = a + b\mathrm{i}$ onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $\mathrm{i}^2 = -1$.

Dado um número complexo $z = a + b\mathrm{i}$:

- a é a **parte real** e representa-se por $\mathrm{Re}(z)$.
- b é a **parte imaginária** e representa-se por $\mathrm{Im}(z)$.
- Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então $z = b\mathrm{i}$ diz-se **imaginário puro**.
- Se $b = 0$, então $z = a + 0\mathrm{i} = a$ diz-se **número real**.

Números Complexos

Exemplo

- Sendo $z = (m^2 - 5m + 6) + (m^2 - 4)\mathrm{i}$, determine m de modo que z seja um imaginário puro.

  Solução: Para que o complexo $z = a + b\mathrm{i}$ seja imaginário puro, a parte real deve ser nula $(a = 0)$ e a parte imaginária diferente de zero $(b \neq 0)$. Temos:

  i) $m^2 - 5m + 6 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 2 \vee m = 3$

  ii) $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (m-2)(m+2) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2 \wedge m \neq -2$

  Unindo as duas condições, temos que: $\boxed{m = 3}$.

Números Complexos

Exemplos

a) $2 + 3i$, em que 2 é a parte real e 3 é a parte imaginária;

b) $5 - 7i$, em que 5 é a parte real e -7 é a parte imaginária;

c) 8, em que 8 é a parte real e 0 é a parte imaginária;

d) $-3i$, em que 0 é a parte real e -3 é a parte imaginária.

Observações:

- O conjunto dos números complexos é denotado pela letra $\mathbb{C}$.
- Todo número real $x = a$ pode ser escrito da forma $x = a + 0i$. Logo assumimos que os números reais estão contidos no conjunto dos números complexos.

Números Complexos

Operações

- **Igualdade:** $a_1 + b_1\mathrm{i} = a_2 + b_2\mathrm{i} \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2$.
- **Oposto de um número composto:** O oposto de $z = a + b\mathrm{i}$ é dado por $-z = -a - b\mathrm{i}$.
- O **Conjugado** de z é o número complexo $\overline{z} = \overline{a + b\mathrm{i}} = a - b\mathrm{i}$.
- O **módulo** de z é o número não negativo $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- **Adição:** somam - se as partes reais e as partes imaginárias separadamente:
  $(a_1 + b_1\mathrm{i}) + (a_2 + b_2\mathrm{i}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathrm{i}$
- **Multiplicação:** aplica-se a distributividade e a soma:
  $(a_1 + b_1\mathrm{i})(a_2 + b_2\mathrm{i}) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\mathrm{i}$

Exemplo

1. Calcule as seguintes somas:
   - $(2+5i)+(3+4i) = (2+3)+(5i+4i) = 5+9i$
   - $i+(2-5i) = i+2-5i = 2-4i$
   - $(2+5i)-(3+4i) = 2+5i-3-4i = -1+i$
   - $(1+i)-(1-i) = 1+i-1+i = 2i$
2. Calcule os seguintes produtos:

$$\begin{aligned}(1+3i)(1+i) &= (1)(1)+(1)(i)+(3i)(1)+(3i)(i)\\ &= 1+i+3i+3i^2 = 1+4i-3 = -2+4i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+3i)(3-2i) &= (2)(3)-(2)(2i)+(3i)(3)-(3i)(2i)\\ &= 6-4i+9i-6i^2 = 6+5i+6 = 12+5i\end{aligned}$$

Números Complexos

Sejam dados os números complexos z, z_1 e z_2:

Propriedades

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $|z| = |\overline{z}|$
3. $z\overline{z} = |z|^2$
4. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
5. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z}_1 \overline{z}_2$

Divisão de Números Complexos

- Se $z \neq 0$, então o inverso de z é $\dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$
- Se $z_2 \neq 0$, então $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1\overline{z}_2}{z_2\overline{z}_2}$

Exemplo

- Efectue as seguintes divisões de números complexos:

$$\begin{aligned}\frac{1+3i}{1+i} &= \frac{1+3i}{1+i}\times\frac{(1-i)}{(1-i)}=\frac{1-i+3i-3i^2}{(1)^2-(i)^2}\\ &= \frac{1+2i+3}{1+1}=\frac{4+2i}{2}=2+i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{-10+15i}{2-i} &= \frac{-10+15i}{2-i}\times\frac{(2+i)}{(2+i)}=\frac{-20-10i+30i+15i^2}{(2)^2-(i)^2}\\ &= \frac{-20+20i-15}{4+1}=\frac{-35+20i}{5}=-7+4i\end{aligned}$$

Números Complexos

Potências de i

- $i^0 = 1$
- $i^1 = i$
- $i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$
- $i^5 = i^4 \cdot i = i$
- $i^6 = i^2 \cdot i^4 = -1$
- $i^7 = i^3 \cdot i^4 = -i$
- $i^8 = i^4 \cdot i^4 = 1$
- $i^9 = i^8 \cdot i = i$
- $i^{10} = i^9 \cdot i = -1$
- $i^{11} = -i.$

Observando esses resultados, chegamos a conclusão de que as potências sucessivas de i se reproduzem periodicamente de quatro em quatro, tomando os seguintes números: $1, i, -1, -i$. Agora, seja $n = 4q + r \Rightarrow i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$

Portanto, $\boxed{i^n = i^r}$ onde r é o resto da divisão de n por 4.

Exemplo:

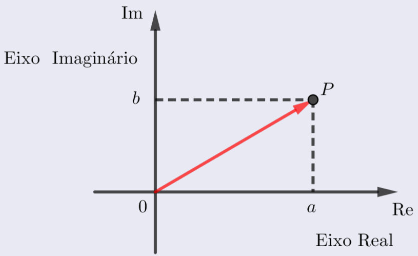
(a) $i^{57} = i^{4 \cdot 14+1} = i$

(b) $i^{70} = i^{4 \cdot 17+2} = i^2 = -1.$

Números Complexos

Representação gáfica

Os números complexos $z = a + bi$ podem ser identificados como pares ordenados de números reais $z = (a, b)$, e a representação gráfica consiste em identificar cada par ordenado (a, b) com um ponto, cujas coordenadas rectangulares são dadas por a e b.

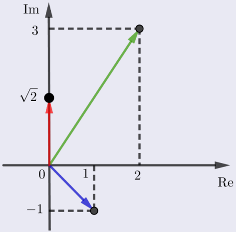


Representação gráfica

Exemplo

Represente os seguintes números complexos no plano complexo:

- $a)\ z = (2, 3)$
- $b)\ z = (0, \sqrt{2})$
- $c)\ z = (1, -1)$



$a)\ z = (2, 3) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 2 \text{ e } \mathrm{Im}(z) = 3.$

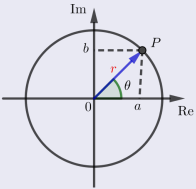
$b)\ z = (0, \sqrt{2}) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ e } \mathrm{Im}(z) = \sqrt{2}.$

$c)\ z = (1, -1) \Rightarrow \mathrm{Re}(z) = 1 \text{ e } \mathrm{Im}(z) = -1.$

Números Complexos

Representação Trigonométrica

Seja dado um número complexo $z = a + bi$ na forma algébrica.



- $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$$\theta = \text{Arg}(z) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}), a > 0 \text{ e } b \geq 0 \\ \pi - \arctan(\left|\frac{b}{a}\right|), a < 0 \text{ e } b \geq 0 \\ \pi + \arctan(\left|\frac{b}{a}\right|), a < 0 \text{ e } b \leq 0 \\ 2\pi - \arctan(\left|\frac{b}{a}\right|), a > 0 \text{ e } b < 0 \\ \frac{\pi}{2}, a = 0 \text{ e } b > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, a = 0 \text{ e } b < 0 \\ 0, a > 0 \text{ e } b = 0 \\ \pi, a < 0 \text{ e } b = 0 \end{cases}$$

Representação Trigonométrica

Exemplo

Represente os seguintes números na sua forma trigonométrica

(a) $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (b) $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ (c) $z = -5 - 5\mathrm{i}$

Resolução:

(a) $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i} \Rightarrow a = 2 \wedge b = 2\sqrt{3} \Rightarrow |z| = \sqrt{4 + 4 \cdot 3} = 4$

$$\theta = \arctan(\frac{b}{a}) = \arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right) = 4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right].$$

Representação Trigonométrica

Exemplo

Represente os seguintes números na sua forma trigonométrica

(a) $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (b) $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ (c) $z = -5 - 5\mathrm{i}$

Resolução:

(b) $-\sqrt{3} + \mathrm{i} \Rightarrow a = -\sqrt{3} \wedge b = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{3+1} = 2$

$$\theta = \pi - \arctan\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$z = r\left(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\right) = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

Representação Trigonométrica

Exemplo

Represente os seguintes números na sua forma trigonométrica

(a) $z = 2 + 2\sqrt{3}\mathrm{i}$ (b) $z = -\sqrt{3} + \mathrm{i}$ (c) $z = -5 - 5\mathrm{i}$

Resolução:

(c) $z = -5 - 5\mathrm{i} \Rightarrow a = -5 \wedge b = -5 \Rightarrow |z| = \sqrt{25 + 25} = 5\sqrt{2}$

$$\theta = \pi + \arctan\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right) = \pi + \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \pi + \arctan(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = 5\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right].$$

Exercício: Reescreve o seguinte número complexo na forma trigonométrica:

$$z = 3 - \sqrt{3}\mathrm{i}$$

Multiplicação e Divisão na forma trigonométrica

- Forma algébrica: $z = a + bi$
- Forma trigonométrica: $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$

Multiplicação de números complexos na forma trigonométrica

Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 + \theta_2)\right].$$

Divisão de números complexos na forma trigonométrica

Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$, então

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right].$$

Números Complexos

Forma Exponencial: $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$z = a + b\mathrm{i} = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$

onde r e θ são respectivamente o módulo e argumento de z.

Exemplo

- Escreva na forma $a + b\mathrm{i}$ os números

  a) $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$
  Resolução: $z = 5\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \Rightarrow r = 5$ e $\theta = \pi$, então
  $z = 5(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi) = 5(-1 + \mathrm{i}\cdot 0) = -5$

  b) $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$
  Resolução: $z = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \Rightarrow r = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{4}$, então
  $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2})\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}\mathrm{i}$

Fórmula de Moivre

Fórmula de Moivre

Se $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, então $z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right]$.

As n soluções de $z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\right]$ são

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

Exemplo

- $a)$ calcule $\left(-1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)^{60}$
- $b)$ Resolva a equação $z^8 = 1$.

Fórmula de Moivre

Resolução

- a) $z = -1 + \sqrt{3}\mathrm{i} \Rightarrow |z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$ e $\theta = \arctan(\frac{b}{a}) = \arctan(\frac{\sqrt{3}}{-1}) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
(-1+\sqrt{3}\mathrm{i})^{60} &= 2^{60}\left[\cos 60(-\frac{\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin 60(-\frac{\pi}{3})\right] \\
&= 2^{60}\left[\cos(-20\pi) + \mathrm{i}\sin(-20\pi)\right] \\
&= 2^{60}\left[\cos(20\pi) - \mathrm{i}\sin(20\pi)\right] \\
&= 2^{60}(1 - \mathrm{i}\cdot 0) \\
&= 2^{60}
\end{aligned}$$

Resolução - cont.

- b) $z^8 = 1 \Leftrightarrow z = \sqrt[8]{1}$, $z = 1 \Rightarrow r = 1 \text{ e } \theta = 0$
  $\sqrt[n]{z} = r^n \left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), n = 8 \text{ e } k = 0, 1, 2, \cdots, 7$
  $\sqrt[8]{1} = 1^8 \left(\cos\frac{0+2k\pi}{8} + \mathrm{i}\sin\frac{0+2k\pi}{8}\right) = \cos\frac{k\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{4}$
  - $z_0 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1 + 0 = 1$
  - $z_1 = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
  - $z_2 = \cos\frac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2} = 0 + \mathrm{i} = \mathrm{i}$
  - $z_3 = \cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
  - $z_4 = \cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi = -1 + 0\mathrm{i} = -1$
  - $z_5 = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
  - $z_6 = \cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2} = 0 - \mathrm{i} = -\mathrm{i}$
  - $z_7 = \cos\frac{7\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

Fórmula de Moivre

Exercícios

Resolva as seguintes equações em $\mathbb{C}$:

(a) $z^3 - \mathrm{i} = 0$

(b) $2z^6 + 128 = 0$

FIM

MUITO OBRIGADO!